ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ ПУТЬ И ТРАНСПОРТНОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО

УДК 624.042.12

В.М. Круглов, В.Э. Юрченко

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ПОСТРОЕНИИ ОСНОВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ БЕТОНА В ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Введение

Неоднородность строения бетона определяет анизотропию его механических свойств – материал в разной степени сопротивляется растягивающим и сжимающим нагрузкам. Кроме того, неоднородность строения является причиной нелинейности зависимостей напряжений от деформаций для бетона, особенно при высоких уровнях напряжений.

В настоящей статье рассмотрен способ получения основных физических соотношений для бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии, который приводит к инвариантному решению задачи для тяжёлых бетонов разной прочности.

1 Общие сведения

Система уравнений в механике деформируемого твёрдого тела включает три группы формул [1–3] – три уравнения равновесия бесконечно малого объёма, шесть уравнений связи между перемещениями и деформациями и шесть уравнений, связывающих напряжения и деформации (основные физические соотношения). Первые девять уравнений являются математически строгими. Ошибка, вызванная их линеаризацией, возникает при больших перемещениях и поворотах, что не является характерным для большинства строительных конструкций. Использование линейных зависимостей между напряжениями и деформациями вносит наибольшую погрешность в оценку напряжённого и деформированного состояния конструкций, изготовленных из материалов, обладающих свойствами нелинейно деформируемых тел. В этой связи чем правильнее отражают определяющие соотношения физический закон, по которому материал сопротивляется различным видам деформаций, тем меньшая погрешность будет допущена в оценке напряжённо-деформированного состояния конструкций.

При исследовании прочности бетона [3] определено особое влияние параметра Лоде – Надаи по напряжениям μ_σ, характеризующего вид напряжённого состояния материала. Такую же роль будет играть и параметр Лоде – Надаи по деформациям μ_ε, если предельная поверхность строится на основе тензора деформаций.

Зависимости между напряжениями и деформациями, отражающие процесс нагружения, должны строиться так, чтобы предельные величины напряжений, определяемые этими зависимостями, принадлежали предельной поверхности прочного сопротивления. В этом случае параметры μ_σ и μ_ε также должны быть включены в такие зависимости.

2 Построение основных физических соотношений для бетона

Предложения для построения основных физических соотношений для бетона, находящегося в трёхосном напряжённом состоянии, основанные на полном решении уравнений [3], позволяют получить в виде частных решений зависимости между напряжениями и деформациями для плоского и одноосного напряжённого состояний. Для этой цели следует иметь опытные данные сложнейших экспериментов.

Однако особый характер напряжённо-деформированного состояния плоских конструкций позволяет отказаться от использования соотношений деформационной теории пластичности для объёмного напряжённого состояния и получить простые основные физические соотношения.

В работе [3] показано, что вид напряжённого состояния μ_σ для плоского напряженного состояния однозначно определяется соотношением:

$$\xi = \sigma_0 / \varepsilon_0, \qquad (1)$$

где σ_0 – среднее нормальное напряжение;

τ_0 – октаэдрическое касательное напряжение.

С соотношением (1) удобнее работать, так как для каждого вида напряжённого состояния оно сохраняет постоянное значение, а именно: при одноосном равномерном растяжении $\xi=\sqrt{2}/2$, чистом сдвиге $\xi=0$, одноосном сжатии $\xi=-\sqrt{2}/2$ и т.д. Тогда компоненты главных напряжений σ_1 и σ_2, выраженные через параметры ξ и τ_0, можно определить по формуле:

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_0\left(3\sqrt{3}\pm\sqrt{2-\xi^2}\right). \quad (2)$$

Параметром, аналогичным ξ в характеристике вида деформированного состояния плоских конструкций будет отношение $\varsigma=\varepsilon_0/\gamma_0$. Тогда для линейно-упругого тела будет выполняться условие:

$$\left(3K_0\varsigma\right)\left(G_0\xi\right)^{-1}=1, \quad (3)$$

где K_0 – начальный объёмный модуль упругости;

G_0 – начальный модуль сдвига.

Это условие соответствует основному закону в классической механике деформируемого твёрдого тела [1] – закону пропорциональности девиатора напряжений девиатору деформаций в упругом трехмерном пространстве:

$$\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_0=2\frac{\tau_0}{\gamma_0}\left(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_0\right), \quad (4)$$

где ij = 11, 22, 33, 12, 13, 23;

δ_{ij} – символ Кронекера (δ_{ij} = 1 при $i = j$, δ_{ij} = 0 при $i \neq j$);

σ_{ij} – тензор напряжений;

ε_{ij} – тензор деформаций.

Для плоского напряжённого состояния оно определяет коллинеарность векторов τ_0 и γ_0 при отсутствии деформаций или их чрезвычайной малости в третьем направлении (ортогональном к плоскости).

Наличие же третьей компоненты деформаций ε_{33} приводит к плоскому обобщенно-деформированному состоянию и может оказаться решающим в развитии пластических деформаций, нарушении сплошности и разрушении бетона при двухосном сжатии (точнее, при величинах $\sigma_0<0$) плоских железобетонных конструкций. В области растягивающих напряжений и чистого сдвига $\sigma_0\geq 0$ величиной нормальной деформации ε_{33} в силу её незначительности (по сравнению с областью сжатия по крайней мере на порядок) можно пренебречь. Очевидно, что появление третьей нормальной деформации приведет к нарушению условия (3), так как между векторами τ_0 и γ_0 возникнет угол ω (сдвиг фаз), определяемый разностью углов вида напряжённого состояния ψ_σ и углом вида деформированного состояния ψ_ε. При этом для простого нагружения отношение $\xi=\sigma_0/\varepsilon_0$ постоянно, а величина $\varsigma=\varepsilon_0/\gamma_0$ является переменной. Тем не менее для плоского напряжённого состояния мерой отклонения векторов τ_0 и γ_0 друг от друга в девиаторной плоскости (неколлинеарности векторов) будет служить отношение $\left(\varepsilon_0/\gamma_0\right)\left(\left(\xi G_0\right)/\left(3\mathrm{K}_0\right)\right)^{-1}\neq 1$ или некоторое обобщённое уравнение:

$$\eta=\left(\varepsilon_0/\gamma_0\right)\left(\left(\xi G_0\right)/\left(3\mathrm{K}_0\right)\right)^{-1}=f\left(\xi,\sigma_{ij}\right)=f_1\left(\xi,\bar{\sigma}_0,\sigma_0\right). \quad (5)$$

Функция η характеризует не только сдвиг фаз между векторами τ_0 и γ_0, но и служит мерой развития пластических деформаций в материале. Введение функции (5) позволяет представить уравнения, связывающие октаэдрические величины напряжений и деформаций $\sigma_0-\varepsilon_0$ и $\tau_0-\gamma_0$, в отличие от [3, формула 3.4] в виде:

$$\varepsilon_0=\eta\psi\frac{\sigma_0}{3K_0}, \quad (6)$$

$$\gamma_0 = \psi \frac{\tau_0}{G_0}. \qquad (7)$$

Здесь параметр ψ определяет развитие пластических деформаций между девиаторными частями τ_0 и γ_0. Безусловно, его влияние вместе со сдвигом фаз сказывается и на объёмной деформации.

Тогда зависимости между напряжениями и деформациями могут быть представлены в виде известных формул закона Гука:

$$\varepsilon_{11} = \left(\sigma_{11} - \mu^* \cdot \sigma_{22}\right) / E^*;\ \varepsilon_{12} = \left(2\left(1+\mu^*\right)\sigma_{12}\right) / E^* \text{ и т.д.}, \qquad (8)$$

где величины E^* и μ^* являются переменными упругими параметрами и определяются по формулам

$$E^* = \frac{3E_0}{\psi\left(\eta\left(1-2\mu_0\right)+2\left(1+\mu_0\right)\right)}, \qquad (9)$$

$$\mu^* = \left(1 - \frac{\left(1-2\mu_0\right)\eta}{1+\mu_0}\right)\left(2 + \frac{\left(1-2\mu_0\right)\eta}{1+\mu_0}\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Задачи деформационной теории пластичности бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии, сводятся к последовательному решению линейных задач с переменными параметрами упругости E^* и μ^*.

При необходимости определения компоненты ε_{33} можно воспользоваться выражением

$$\varepsilon_{33} = \frac{\psi\left[\left(1-2\mu_0\right)\eta - \left(1+\mu_0\right)\right]\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)}{3E_0}. \qquad (11)$$

В случае применения шаговых алгоритмов зависимости между приращениями компонент деформаций $\left(\varepsilon_{ij}\right)$ и приращениями компонент напряжений $\left(\sigma_{ij}\right)$ могут быть записаны в виде, подобном выражениям (8).

При этом упругие параметры, отвечающие каждому шагу нагружения, определяются по формулам:

$$\begin{cases} E_k^* = \dfrac{3E_0\left(\eta'\psi + \psi'\eta\right)\psi'}{\left(1-2\mu_0\right)\psi'\varphi_1 + 2\times\left(1+\mu_0\right)\left(\eta'\psi+\psi'\eta\right)\psi_1}; \\ \mu_k^* = \dfrac{\left(1-\left(1-2\mu_0\right)\psi'\varphi_1\right)\left[\left(\eta'\psi+\psi'\eta\right)\psi_1\left(1+\mu_0\right)\right]^{-1}}{\left(2+\left(1-2\mu_0\right)\psi'\varphi_1\right)\left[\left(\eta'\psi+\psi'\eta\right)\psi_1\left(1+\mu_0\right)\right]^{-1}}. \end{cases} \qquad (12)$$

В формулах (12) φ_1 и ψ_1 – параметры, учитывающие погрешность шаговой линеаризации для законов $\sigma_0 - \varepsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$.

Выбор уравнений для функций ψ и η, характеризующих развитие нелинейных деформаций в бетоне, находящемся в условиях плоского напряжённого состояния, основывается на следующих гипотезах и предпосылках:

- относительное изменение объёма ε_0 является непрерывной нелинейной функцией среднего напряжения σ_0 и вида напряжённого состояния ξ;
- сдвиг на октаэдрических площадках γ_0 является непрерывной нелинейной функцией октаэдрического касательного напряжения τ_0 и вида напряжённого состояния ξ;
- основные физические соотношения в начальной точке деформирования должны соответствовать формулам теории линейной упругости;
- обеспечивается возможность непосредственного перехода в предельном состоянии от кривых деформирования к условию прочности бетона.

Рассматривая развитие объёмных нелинейных деформаций (рис. 1, *а*) в зависимости от относительного уровня $\sigma_0^* = \sigma_0 \times \bar{\sigma}_0^{-1}$ (здесь $\bar{\sigma}_0$ – предельное значение σ_0), параметра ξ для бетонов разной прочности (В20 … В70), по данным экспериментальных исследований [4–6] можно выделить такие характерные отличия кривой $\sigma_0 - \varepsilon_0$. При низких уровнях $\sigma_0^*(\sigma_0 < 0)$ кривая близка к линейной зависимости. Для больших значений σ_0^* прослеживается существенная нелинейность, причём до уровня $\sigma_0^* = k_T^0$= 0,7…0,8 кривая выпукла, а выше него до $\sigma_0^* = 1/k_T^\nu \left(k_T^\nu \geq 1\right)$ вогнута. Можно считать, что вблизи $\sigma_0^* = k_T^0$ = 0,7…0,8 находится точка образования микротрещин [5, 6], а уровню $\sigma_0^* = 1/k_T^\nu$ соответствует образование макротрещин. Этап деформирования, связанный с развитием дилатации бетонных образцов, позволяет отметить, что максимальное значение октаэдрическое нормальное напряжение достигает в точке пересечения кривой $\sigma_0 - \varepsilon_0$ и прямой $\sigma_0 = 3K_0\varepsilon_0$. При напряжениях $\sigma_0 > 0$ кривую $\sigma_0 - \varepsilon_0$ отличает слабая нелинейность. Для этой области характерным является совпадение границ микро- и макротрещинообразования.

Зависимостям $\tau_0 - \gamma_0$ (рис. 1, *б*) в области растягивающих напряжений и чистого сдвига $(\sigma_0 \geq 0)$ отвечает слабая нелинейность, а максимальным деформациям соответствует образование макротрещин. При значениях $\sigma_0 < 0$ кривые $\tau_0 - \gamma_0$ существенно нелинейны, а предельные деформации превышают деформации макротрещинообразования.

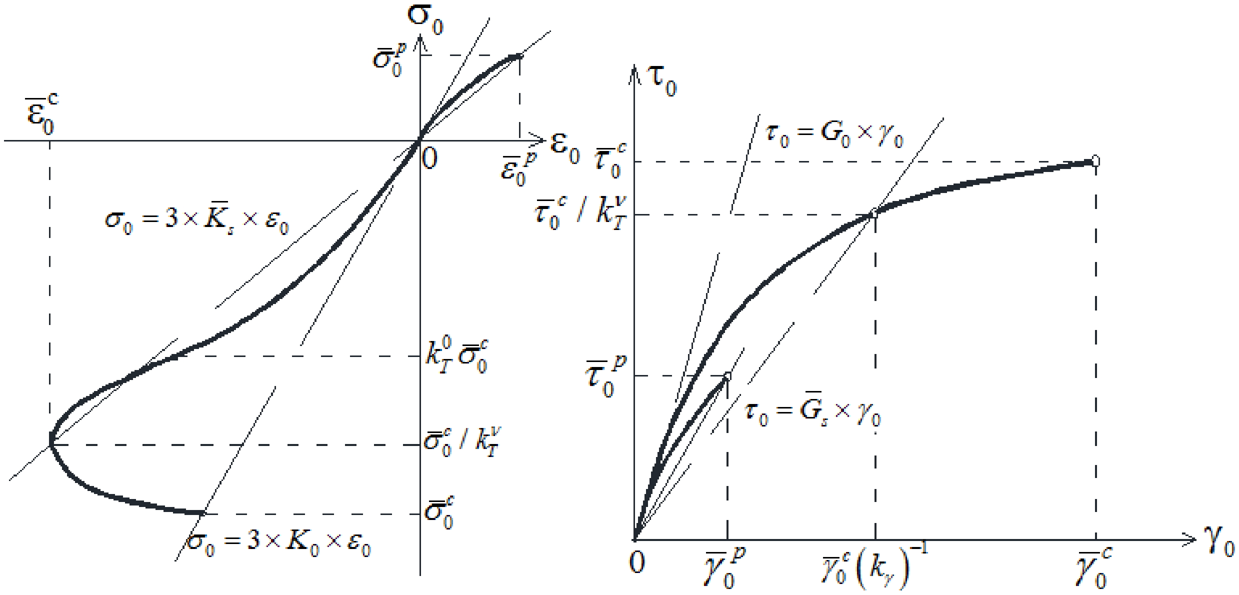


Рис. 1. Общий вид зависимостей $\sigma_0 - \varepsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$:

а – зависимость $\sigma_0 - \varepsilon_0$; *б* – зависимость $\tau_0 - \gamma_0$

В качестве аналитического выражения параметра η примем функцию вида

$$\eta = 1 - (1 - \bar{\eta})\left(\sigma_0 (\bar{\sigma}_0)^{-1}\right)^k . \tag{13}$$

Постоянную k определим из предположения близости величины η к единице в области нижней границы микротрещинообразования, характеризуемой $\sigma_0^* = k_{\text{T}}^0$ = 0,7…0,8 [5, 6]. Тогда имеем

$$K \approx -21/\xi . \tag{14}$$

Значение $\bar{\eta}$ можно определить по формуле

$$\bar{\eta} = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}R_b}{3G_0\bar{\gamma}_{0c}}\right)\left(\frac{3\bar{\tau}_0}{\sqrt{2}R_b}\right)^m . \tag{15}$$

Теоретически кривые, полученные по выражению (8) и соответствующие различным значениям ξ, приведены на рис. 2. Здесь же изображены экспериментальные точки, полученные по опытным данным Х. Купфера.

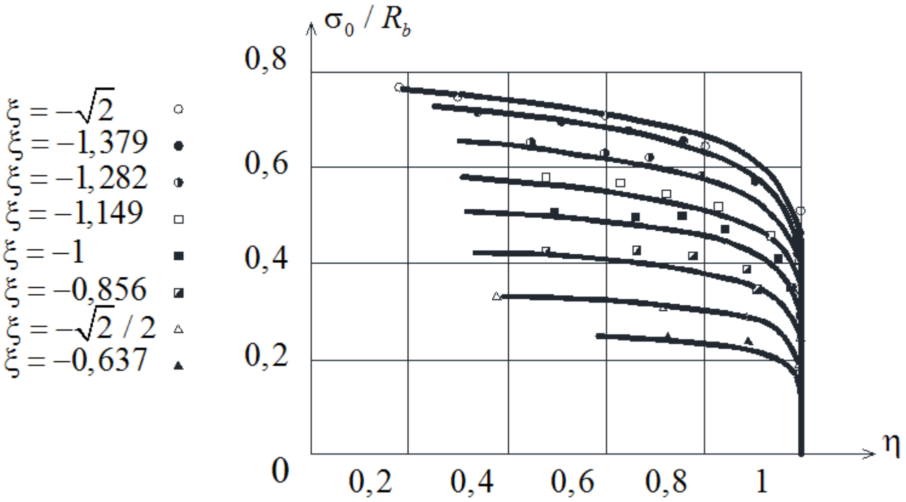


Рис. 2. Теоретические кривые функции η в сравнении с экспериментальными данными Х. Купфера [6]

В формуле (15) величина $\overline{\gamma}_{0c}$ соответствует предельному сдвигу на октаэдрических площадках при одноосном сжатии, т.е. при $\overline{\tau}_0 (R_b)^{-1} = \sqrt{2}/3$. Константа m может быть определена в предположении выполнения при двухосном сжатии условия

$$\overline{\gamma}_0 = -3\xi\overline{\tau}_0 (R_b)^{-1} \gamma_{0c}. \tag{16}$$

Тогда, учитывая, что при двухосном равномерном сжатии $\xi = -\sqrt{2}$, а $\overline{\tau}_0 (R_b) = \sqrt{2} R_{2c} (3R_b)^{-1}$, получим

$$m = \ln\left(\left(\frac{3\sqrt{2}G_0\overline{\gamma}_{0c}}{R_b} - 1\right)\left(\frac{3\sqrt{2}G_0\overline{\gamma}_{0c}}{R_b} - 2\right)^{-1}\right)\left(\ln\left(R_{2c}(R_b)^{-1}\right)\right)^{-1}. \tag{17}$$

В области растягивающих напряжений при $\sigma_0 > 0$ значения η принимаются равными единице.

В проведённых исследованиях [3] показано, что для аналитического выражения функции пластичности ψ в зависимости от инвариантов $\tau_0 - \gamma_0$ целесообразно использовать формулу В.В. Соколовского. Тогда получим

$$\psi = \left[1 + \tau_0^2\left(\overline{\gamma}_0^2 G_0^2\right)^{-1} - \left(\tau_0\left(\overline{\tau}_0\right)^{-1}\right)^2\right]^{-0,5}, \tag{18}$$

где $\overline{\gamma}_0$ – сдвиг на октаэдрических площадках, отвечающий предельному значению октаэдрического напряжения ($\overline{\tau}_0$).

Если учесть, что объёмные деформации в момент разрушения (при $\sigma_0 < 0$) по опытам многих исследователей близки к значениям $\overline{\varepsilon}_0 = \overline{\sigma}_0 (3K_0)^{-1}$, то, введя величину $\overline{\eta}$, характеризующую значение функции (5) при предельном напряжении $\overline{\sigma}_0$, можно записать

$$\overline{\gamma}_0 = \overline{\tau}_0 \left(G_0\overline{\eta}\right)^{-1}. \tag{19}$$

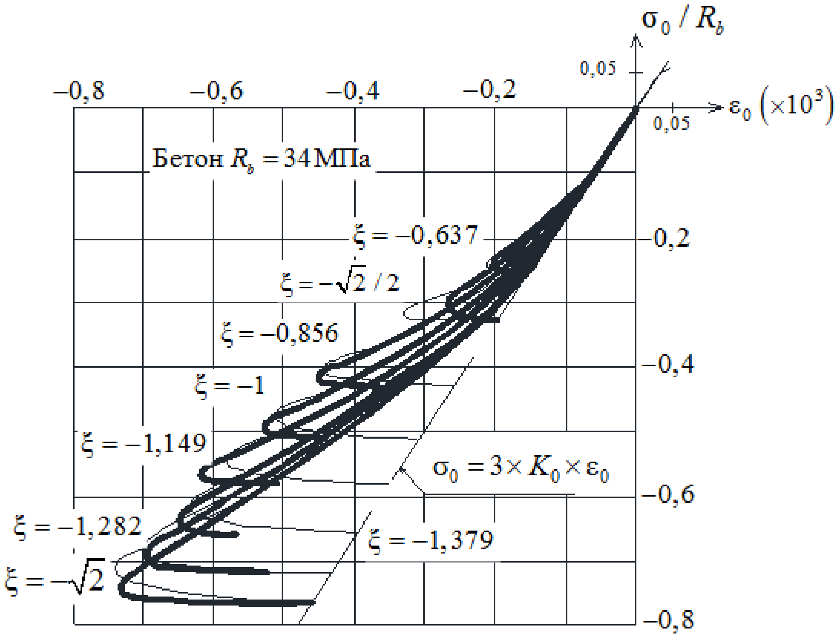
Окончательно аналитическое выражение (18) для параметра ψ, характеризующего развитие неупругих деформаций в зависимости $\tau_0 - \gamma_0$, будет представлено в виде

$$\psi = \left[1 + \left(\bar{\eta}^2 - 1\right)\left(\tau_0\left(\bar{\tau}_0\right)\right)^2\right]^{-0,5}. \tag{20}$$

Величины предельных октаэдрических деформаций $\bar{\gamma}_0$, входящие в уравнение (18), для определения ψ в зонах «растяжение – сжатие» одноосного и двухосного сжатия определяются соотношением

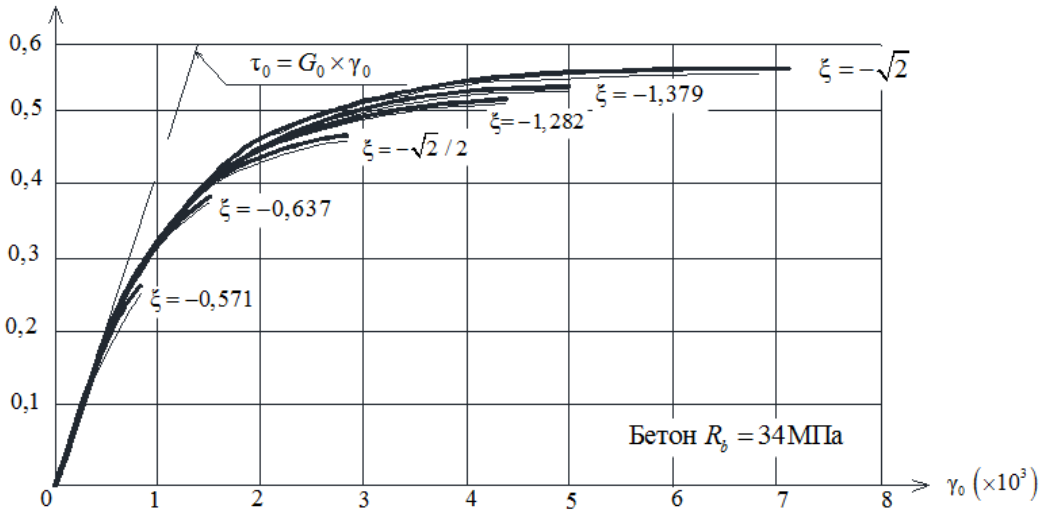
$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\gamma_{0c}}{f(\xi)}. \tag{21}$$

Теоретические кривые $\sigma_0 - \varepsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$, полученные по предложенному выше подходу, в сравнении с результатами экспериментальных исследований Х. Купфера приведены на рис. 3, 4.



– теоретические зависимости; – экспериментальные кривые

Рис. 3. Теоретические и экспериментальные зависимости $\sigma_0 - \varepsilon_0$



– теоретические зависимости; – экспериментальные кривые

Рис. 4. Теоретические и экспериментальные зависимости $\tau_0 - \gamma_0$

Анализируя представленные экспериментальные и теоретические зависимости $\sigma_0 - \varepsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$, можно отметить их хорошее соответствие.

3 Построение регулярной кривой предельной прочности бетона в плоском напряжённом состоянии

В качестве уравнений, аппроксимирующих функцию $f(\xi)$ в разных зонах плоского напряженного состояния, примем зависимость вида

$$f_i(\xi) = a_i\xi^2 + b_i\xi + c_i. \tag{22}$$

Неизвестные коэффициенты a_i, b_i, c_i, входящие в уравнение (22), определяются из условия непрерывности и регулярности предельной кривой прочности в плоском напряжённом состоянии в точках $\xi = -\sqrt{2}$, $\xi = -\sqrt{2}/2$, $\xi = \sqrt{2}/2$.

Тогда для зоны $-\sqrt{2} \le \xi \le -\sqrt{2}/2$ имеем

$$f_1(\xi) = 2\left(1 - \tilde{R}_{2c}^{-1}\right)\left(\xi + \sqrt{2}\right)^2 + \tilde{R}_{2c}^{-1}, \tag{23}$$

$$a_1 = 2\left(1 - \tilde{R}_{2c}^{-1}\right),$$

$$b_1 = 4\sqrt{2}\left(1 - \tilde{R}_{2c}^{-1}\right),$$

$$c_1 = 4 - 3\tilde{R}_{2c}^{-1},$$

где $\tilde{R}_{2c} = R_{2c}/R_b$ (R_{2c} – прочность бетона при равномерном двухосном сжатии, а R_b – призменная прочность бетона).

Для зоны $-\sqrt{2}/2 \le \xi \le -\sqrt{3}/3$ имеем

$$a_2 = \frac{b_2}{\sqrt{2}} - 2\left(1 - \tilde{R}_{2c}^{-1}\right),$$

$$b_2 = \frac{2\left(6 - \chi^{-1} - \tilde{R}_{2c}^{-1}\right)}{4 - 3\sqrt{2}},$$

$$c_2 = \frac{b_2\sqrt{2}}{4} - \left(2 - \tilde{R}_{2c}^{-1}\right).$$

Для зоны $-\sqrt{3}/3 \le \xi \le \sqrt{2}$ имеем

$$a_3 = \frac{\left(4\sqrt{3} - 7\sqrt{2}\right)d_1 - d_2\left(4\sqrt{3} + 11\sqrt{2} - 24\right)}{\left(4 - 3\sqrt{2}\right) \times \left(5 + 2\sqrt{6}\right)},$$

$$b_3 = \frac{2\left(5 - 2\sqrt{6}\right)d_1 - 2d_2\left(5 - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6}\right)}{\left(4 - 3\sqrt{2}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right)},$$

$$c_3 = \frac{1}{\chi} - \frac{\left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right)d_1 - d_2\left(20\sqrt{3} + 21\sqrt{2} - 16\sqrt{6} - 24\right)}{2 \times \left(4 - 3\sqrt{2}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right)} - d_3,$$

где $d_1 = 5 - 2\tilde{R}_{2c}^{-1}, d_2 = 1 - \chi^{-1}, d_3 = 1 - \tilde{R}_{2c}^{-1}$, $\chi = R_p/R_b$, R_p – прочность бетона при одноосном растяжении.

Предложенный подход проверен на экспериментальных результатах для бетонов с широким диапазоном призменной прочности, в том числе и в плоском напряжённом состоянии. Это позволяет сделать вывод о возможности его применения в построении основных физических соотношений модифицированных бетонов высокой прочности. Для этой цели достаточно иметь опытные данные испытаний образцов при одноосном сжатии и одноосном растяжении.

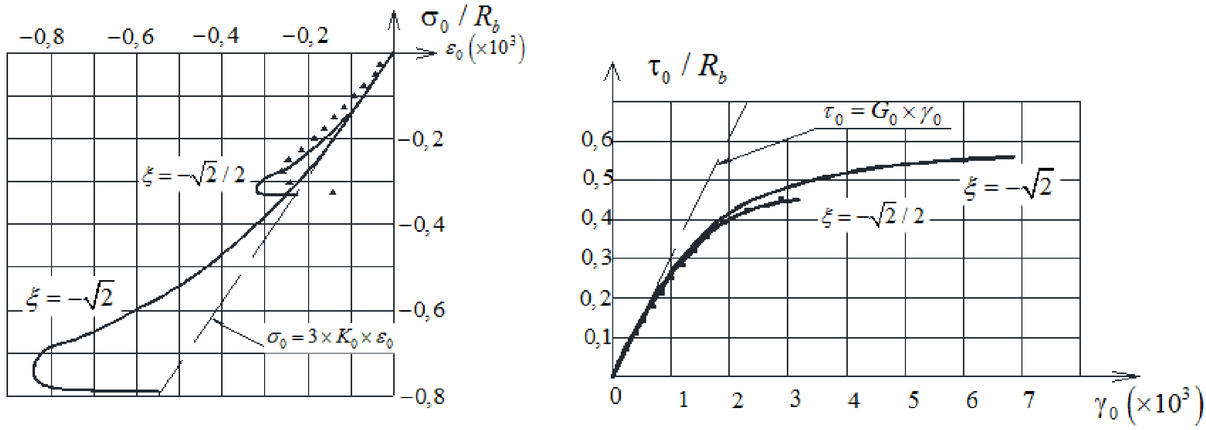
4 *Построение основных физических соотношений для модифицированных бетонов*

Построение основных физических соотношений выполнено для трёх составов высокопрочных модифицированных бетонов нового поколения, разработанных в [7]. Данные бетоны требуют значительно меньшего расхода цемента на единицу призменной прочности (в пределах 2,5–4,5 кг/МПа), обладают высокими показателями воздухонепроницаемости и морозостойкости; их основные характеристики приведены ниже (таблица). Эти характеристики обеспечиваются порошковой активацией бетонной смеси, позволяющей усилить действие супер- и гиперпластификаторов в бетоне, а также тщательным подбором гранулометрического состава композита.

Механические характеристики высокопрочных модифицированных бетонов

Состав	Добавка-наполнитель	R_b, МПа	R_{bt}, МПа	μ_0
Состав 1	Халцедон	117,50	5,26	0,19
Состав 2	Молотый шлак	110,00	5,41	0,24
Состав 3	Микроволластонит 30-97	114,20	5,64	0,24

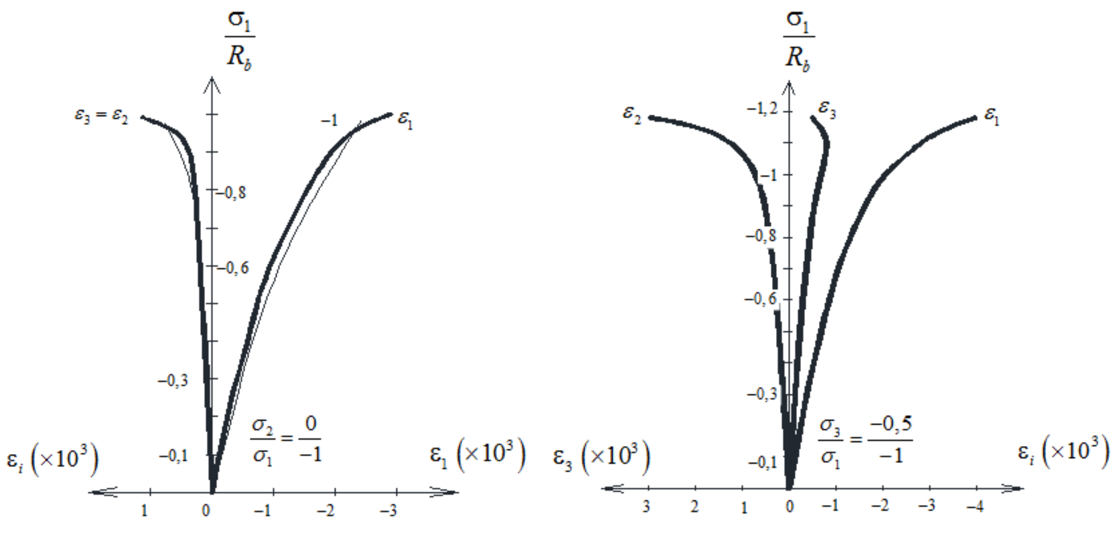
Расчёт физических соотношений проведён для случая одноосного и равномерного двухосного сжатия. Результаты расчётов сопоставлены с опытными данными, полученными по результатам экспериментов авторами бетонных составов.



а *б*

Рис. 5. Зависимости $\sigma_0 - \varepsilon_0$ и $\tau_0 - \gamma_0$ для модифицированного бетона (состав 1):

а – зависимость $\sigma_0 - \varepsilon_0$; *б* – зависимость $\tau_0 - \gamma_0$; ■, ▲ – опытные точки



а *б*

Рис. 6. Зависимости $\sigma - \varepsilon$ для модифицированного бетона (состав 1):

а – одноосное сжатие; *б* – двухосное неравномерное сжатие;

– теоретические зависимости; – экспериментальные кривые

Анализируя полученные результаты (рис. 5, 6), можно отметить хорошее совпадение опытных данных и теоретических построений, а также высокую степень корреляции с результатами проф. В.М. Круглова в [3]. По итогам расчётов кривые зависимостей для модифицированных бетонов второго и третьего составов подобны изображённым на рис. 5, 6.

Выводы

В статье предложен новый подход к построению основных физических соотношений, основанный на инвариантном решении задач механики деформируемого твёрдого тела для бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии. Показано соответствие предлагаемых зависимостей реальному напряжённому и деформированному состоянию материала. Кроме того, показан способ построения критерия прочности для бетона, находящегося в плоском напряжённом состоянии, позволяющий получить регулярную кривую предельной прочности.

Продемонстрирована возможность использования предлагаемого подхода для построения основных физических соотношений для высокопрочных тяжёлых бетонов широкого класса.

Библиографический список

1 **Безухов, Н.И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М., 1982. – 448 с.

2 **Новожилов, В.В.** Пути развития теории деформирования поликристаллов / В.В. Новожилов // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твёрдого тела. – М., 1984. – С. 11–24.

3 **Карпенко, Н.И.** Нелинейное деформирование бетона и железобетона / Н.И. Карпенко, В.М. Круглов, Л.Ю. Соловьёв. – Новосибирск : Изд-во СГУПСа, 2001. – 276 с.

4 **Берг, О.Я.** Высокопрочный бетон / О.Я. Берг, Е.Н. Щербаков, Г.Н. Писанко. – М., 1971. – 209 с.

5 **Яшин, А.В.** Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряжённого состояния / А.В. Яшин // Расчет и конструирование железобетонных конструкций. – М., 1977. – С. 48–57.

6 **Kupfer, H.B.** Das Nicht–linear Verhalten des BetonsbeiZweiachsigerBeanspruchung / H.B. Kupfer // Betonund. Stahlbetonbau. – 1973. – № 11. – P. 269–274.

7 **Хвастунов, А.В.** Порошково-активированный высокопрочный бетон и фибробетон с низким удельным расходом цемента на единицу прочности : дис. … канд. техн. наук / А.В. Хвастунов. – Пенза, 2011. – С. 111–132.

Bibliography

1 **Bezuhov, N.I.** The fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creeping / N.I. Bezuhov. – Moscow, 1968. – 512 p.

2 **Novozilov, V.V.** The development of the theory of polycrystal deformation / V.V. Novozilov // The nonlinear models and sums of the deformable hard solid mechanics. – Moscow, 1984. – P. 11–24.

3 **Kruglov, V.M.** Nonlinear deformation of concrete and reinforced concrete / N.I. Karpenko, V.M. Kruglov, L.Y. Solovyov. – Novosibirsk : Publishing House of Siberian Transport University, 2001. – P. 31–76.

4 **Berg, O.Y.** The high-strength concrete / O.Y. Berg, E.N. Scherbakov, G.N. Pisanko. – Moscow, 1971. – 208 p.

5 **Yaschin, A.V.** The concrete strength and deformation criterion due to simple loading for different stress-state / A.V. Yaschin // The estimation and construction of ferroconcrete items. – Moscow, 1977. – P. 48– 57.

6 **Kupher, H.B.** Nonlinear behavior of concrete under biaxial loadings / H.B. Kupher // Concrete and reinforced concrete structures. – 1973. – № 11. – P. 269–274.

7 **Hvastunov, A.V.** Powder-activated high-strength concrete and fibrous concrete with low specific consumption of cement per unit of strength : dis. ... Candidate of Technical Sciences / A.V. Hvastunov. – Penza, 2011. – P. 111–132.